

## Varianta 36

### Subiectul I.

- a)  $|z| = 3$ .
- b)  $\frac{6\sqrt{35}}{5}$ .
- c) Ecuația tangentei este  $x + 5y - 6 = 0$
- d)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ .
- e)  $S_{ABC} = \frac{27}{2}$ .
- f)  $a = 0$  și  $b = 1$ .

### Subiectul II.

1.

- a)  $\sqrt{0,999} \approx 0,99$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{2}{5}$ .
- c) 1024.
- d)  $x \in \{-2, 1\}$ .
- e)  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

2.

- a)  $f'(x) = 2 + \sin x, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f(x) dx = 1 - \sin 1$ .
- c)  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 + \sin 1$ .
- e)  $\int_0^1 \frac{f'(x)}{2 + f(x)} dx = \ln(4 - \cos 1)$ .

### Subiectul III.

- a) Evident.
- b) Dacă  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3$ , atunci  $\hat{x}^2, \hat{y}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ .  
 $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$ , rezultă  $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0}$ , de unde obținem  $\hat{x} = \hat{0}$  și  $\hat{y} = \hat{0}$ .
- c) Se arată prin calcul direct.
- d) Numărul elementelor mulțimii  $G$  este egal cu  $3^2 = 9$ .

e) Dacă  $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \in G$ , obținem  $B = A^{-1} = (\hat{a}^2 - \hat{2}\hat{b}^2) \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{2}\hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \in G$ .

f) Se verifică ușor axiomele corpului, folosind și punctele c) și e).

g) Considerăm mulțimea cu 25 de elemente  $K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_5 \right\}$ .

Atunci,  $(K, +, \cdot)$  este corpul căutat.

#### Subiectul IV.

a)  $f(1) = 2007$ .

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Evident, folosind monotonia funcției putere.

d) Pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ ,  $F'(x) = f(x) > 0$ .

e) Din d) rezultă că  $F$  este strict crescătoare, deci injectivă.

Obținem  $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2007}}{2007}$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$  și

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$  de unde rezultă ușor că  $F$  este surjectivă, deci bijectivă.

f) Făcând schimbarea de variabilă  $g(x) = y$  se obține concluzia.

g) Deoarece funcția  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este strict crescătoare și bijectivă rezultă că și  $F^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este strict crescătoare și bijectivă, având  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F^{-1}(x) = +\infty$

Mai mult,  $g(x) = y \Leftrightarrow x = F(y)$ . Obținem:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{F(y)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{f(y)} = 0$ .